数理解析研究所講究録
751巻 1991年 106-112

有限群の作用とCartan subalgebra

都立大・理　関根義浩（Yoshihiro Sekine）

§0. まえがき

[1]において，Jones-Popaは，II_1-factorのMASAに関する興味深いいくつかの結果をえている。その中で，AFD type II_1 factors $R \supseteq R_0$ が"良い"inclusionのとき（群作用からきまるとき），いつ共通のCartan subalg.をもつか？という問題の必要十分条件を与えている。この結果が群作用から決まる一般のAFD factorsのpairに対してどうなるか？ということを調べるのが目的である。

[1]におけるその他の結果やそれに関連すること，また index theoryとの関連などについては，それぞれの文献を見てください。

§1. 準備

結果を述べるのに必要な作用の分類について復習する。ここでは結果のみで，くわしい定義やその意味については，原論文を見てください。また，II_1の時には，作用の分類のさきがけとなったConnes，Jonesの結果もあるが，ここではOcneanuの結果のみを書いておく。

ii) type II case (A. Ocneanu)

M : AFD type II factor

G : discrete amenable group

$\alpha : G \to \mathrm{Aut}\, M$ action

に対して，α の cocycle conjugacy の complete invariant は．

($N(\alpha)$, $\chi = [\lambda, \mu]$, mod)

ここで，$N(\alpha) = \alpha^{-1}(\mathrm{Int}\, M)$

$\chi = [\lambda, \mu]$: characteristic invariant

$\mathrm{mod} : G \to \mathbb{R}_+$ homomorphism

$\tau \cdot \alpha_g = (\mathrm{mod}\, \alpha_g)\tau$, τ : trace on M

iii) type III case (河東・Sutherland・竹崎)

M : AFD type III factor

G : discrete amenable group (III_1 のときには finite or abel)

$\alpha : G \to \mathrm{Aut}\, M$ action

に対して，complete invariant は．

($N(\alpha)$, $\chi = [\lambda, \mu]$, ν, mod)

ここで，$N(\alpha) = \alpha^{-1}(\mathrm{Cnt}\, M)$

$\chi = [\lambda, \mu]$: characteristic invariant

ν : modular invariant

mod : Connes-竹崎 module

§2. 結果

まず最初に，III型との比較のために，AFD type II_1 factor に対する結果を述べておく。

定理（Jones - Popa）

R : AFD type II_1 factor

G : 有限群

$\alpha : G \to \mathrm{Aut}\, R$ outer action

に対して，次のことが成り立つ。

(1) $R \rtimes_\alpha G \supseteq R$ は（いつでも）common Cartan subalg. をもつ

(2) $R \supseteq R^\alpha$ が common Cartan subalg. をもつ必要十分条件は，

G : abel

AFD type II_∞ factor $R_{0,1}$ に対しては，上と同じ statement が成り立つ。実際に，

$\alpha : G \to \mathrm{Aut}\, R_{0,1}$ outer action of finite group

とすれば，Ocneanu の結果から，

$$\begin{array}{ccc} R_{0,1} \rtimes_\alpha G & & (R \rtimes_\beta G) \otimes B(H) \\ \cup\!\text{l} & \cong & \cup\!\text{l} \\ R_{0,1} & & R \otimes B(H) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} R_{0,1} & & R \otimes B(H) \\ \cup\!\text{l} & \cong & \cup\!\text{l} \\ (R_{0,1})^\alpha & & R^\beta \otimes B(H) \end{array}$$

となることがわかるので。ここで、β は unique outer action of G on R。

III型に対しては、次のことが成り立つ。

定理

M : AFD type III factor

G : finite group

$\alpha : G \to \mathrm{Aut}\, M$ outer action

に対して、次のことが成り立つ。

(1) $M \rtimes_\alpha G \supseteq M$ が common Cartan subalg. をもつ必要十分条件は、

$N(\alpha) = \{e\}$ （ e は G の unit ）

(2) $M \supseteq M^\alpha$ が common Cartan subalg. をもつ必要十分条件は、

$$\begin{cases} G : \text{abel} \\ \mathrm{mod}\, \alpha_g = 1, \quad g \in G \\ \lambda(g, h) = 1, \quad g \in G,\ h \in N(\alpha) \end{cases}$$

II型とIII型との本質的な差は、outer action の“種類”が異なることである。Jones の結果から、有限群の R への作用は一意的であるが、III型 factor M への作用は、上の invariant をみればわかるように一意ではなく、“III型的”な作用が存在する（ただし、III_1 以外の時）。

一般に、III型 factors の pair $M \supseteq N$ が common Cartan subalg. をもつとき，その flow spaces X_M, X_N の間に X_M "$\leqq$" X_N なる関係（quotient をとるので）があり，この性質に対応するのが定理の条件である。

証明の idea は，与えられた pair に conjugate でかつ common Cartan subalg. をもつ model を作ることであるので，作用の分類結果に深く依存している。また，接合積と不動点は，お互いに "dual" な関係になっていることで，index theoretic な duality を意味する次の事実が証明の key となっている。

M : AFD factor

G : finite abelian group

$\alpha : G \to \mathrm{Aut}\, M$ outer action

に対して，

$$\begin{array}{ccc} M & & (M \rtimes_\alpha G) \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G} \\ \cup\!\!\shortmid & \cong & \cup\!\!\shortmid \\ M^\alpha & & M \rtimes_\alpha G \end{array}$$

注意．

群 G が無限群のときには，接合積と不動点の間に本質的な "差" が生じ，同時に扱うことはできないが，上の証明の idea から，接合積に関しては discrete amenable group に関して（III_1 のときには abel を仮定して）必要十分条件がわかる。

§3. example

次の example は，典型的な "III型的" な作用の例である．

M : AFD type III_λ factor , $0 < \lambda < 1$

$\varphi \in M_*^+$: faithful state such that

$$\sigma_T^\varphi = 1 , \qquad T = -2\pi / \log\lambda$$

$n \in \mathbb{N}$: fix

$G = \mathbb{Z}_n$

$\alpha : G \to \mathrm{Aut}\, M$ outer action

$$\alpha^i = \sigma^\varphi_{\frac{i}{n}T} , \qquad i = 0, 1, \cdots, n-1$$

とする．このとき

$$N(\alpha) = G = \mathbb{Z}_n$$

$$\lambda = \mu = 1$$

$$\nu(i) = \frac{i}{n} T$$

$$\mathrm{mod}\, \alpha^i = 1$$

であるから，$M \supseteq M^\alpha$ は common Cartan subalg. をもち，$M \rtimes_\alpha G \supseteq M$ はもたない．さらに，$X_{M \rtimes_\alpha G}$，X_M，X_{M^α} をそれぞれ $M \rtimes_\alpha G$，M，M^α の flow spaces とすれば，次の "大小関係" がある．

$$X_{M \rtimes_\alpha G} = X_M \times \{1, 2, \cdots, n\}$$

$$X_{M^\alpha} = X_M \times \{1, 2, \cdots, n\}$$

これが接合積と不動点が "dual" な関係にあることの意味である.

References

[1] V. Jones and S. Popa : Some properties of MASA's in factors, Operator Theory : Adv. Appl. 6, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston, 1982, 89-102.

[2] A. Ocneanu : Actions of discrete amenable groups on von Neumann algebras, Springer Lecture Notes in Math. No. 1138.

[3] C. Sutherland - M. Takesaki : Actions of discrete amenable groups on injective factors of type III$_\lambda$, $\lambda \neq 1$. Pacific J. Math. 137 (1989). 404-444.

Y. Kawahigashi - C. Sutherland - M. Takesaki : The structure of the automorphism group of an injective factor and the cocycle conjugacy of discrete abelian group actions, preprint.

[4] J. Feldman - C. Sutherland - R. Zimmer : Subrelations of ergodic equivalence relations, Ergod. Th. & Dynam. Sys 9 (1989) 239-269

[5] T. Hamachi - H. Kosaki : Orbital factor map. preprint.